Descontar en tiempo continuo

Para descontar cuando los intereses se pagan en tiempo discreto, p.ej. una vez al año, partimos de una inversion inicial de S_0. Despues de t años da un valor de

$$S_t = S_0(1+r)^t$$

Entonces, el valor presente de S_t, o sea la cantidad que tenemos que ahorrar para obtenerlo, es

$$S_0 = S_t(1+r)^{-t}$$

Si los intereses se pagan mensualemente, y la tasa de interes anual sigue siendo r, entonces la inversión alcanza un valor despues de t años de $S_t = S_0(1+r/12)^{12t}$. De forma similar, si son n pagos anuales, $S_t = S_0(1+r/n)^{nt}$.

Ahora, sabemos (o podemos consultar) que $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e$. Para aplicar esta igualdad, sustituimos n/r por x y tenemos $S_t = S_0(1+1/x)^{x\,rt}$. Tomando el limite para $x \to \infty$, es decir hacer que los intervalos sean cada vez más cortos o sea n cada vez más grande (porque r es constante), obtenemos

$$S_t = S_0 e^{rt}$$

Entonces, el valor presente de un pago en el momento t es

$$S_0 = S_t e^{-rt}$$

Ahora, si no se trata de un solo pago, tenemos que agregar los valores presentes de todos los pagos. Cuando se trata, p.ej., de intereses que recibimos anualmente, podemos simplemente sumar sobre todos los pagos,

$$S = \sum_{t=0}^{T} S_t(1+r)^{-t}$$

Pero si no solo los intereses son continuos, sino tambien la cantidad que estamos descontando llega como un flujo continuo (p.ej. el valor de gozar de buena salud nos da felicidad todo el tiempo), entonce tendríamos que sumar los valores para una cantidad infinita de momentos infinitesimales. Eso es, necesitamos la integral sobre los valores en cada momento S_t, descontados al presente:

$$S = \int_{t=0}^{T} S_t e^{-rt}$$